Der Zeitwert des Geldes

- Vom Umgang mit Zinsstrukturkurven -

© Dr. rer. pol. Helmut Siegert

PROBLEMSTELLUNG

Zinsänderungen beeinflussen den Wert der Zahlungsströme, die Kreditinstitute, Versicherungen und sonstige Unternehmen aufgrund ihrer Bilanzstruktur empfangen oder leisten. Unternehmen, die sich vor einigen Jahren zu relativ hohen Zinsen finanziert haben, sind heute geneigt, durch Zinsswaps ihre festen Zinsverpflichtungen gegen variable zu tauschen. Ein solcher Tausch ist allerdings nur dann "fair", d.h. marktgerecht, wenn sich der Wert beider Zahlungsströme deckt. Um den aktuellen Wert ("mark-to-market") einer Position zu erhalten, sind grundsätzlich die Konditionen des zu bewertenden Finanztitels aufzulösen, um aus dem daraus resultierenden Zahlungsstrom den Barwert zu bestimmen. Er gibt den theoretischen ("fairen") Wert des Finanztitels zum Bewertungszeitpunkt t_0 wider:

$$(1)\quad BW_t = \sum_{t=1}^{T} \frac{Z_t}{(1+r)^t}$$

wobei:

BW_t	= theoretischer Wert des Finanztitels zum Zeitpunkt t
Z_t	= Zahlung zum Zeitpunkt t
T	= Restlaufzeit
r	= Marktzinssatz
t	= Zeitindex

Die Abbildung der realen Zinsstruktur (als gemeinsames "underlying" aller zinstragenden Finanztitel) durch **einen** einheitlichen Zinssatz r simplifiziert die Realität, wird doch immer eine horizontale Zinsstrukturkurve in Höhe des Diskontierungssatzes r unterstellt! Die Bewertung unterliegt damit - sofern nicht tatsächlich eine horizontale Zinsstrukturkurve vorliegt - nicht den realen, marktgerechten Opportunitätskosten. Um Fehleinschätzungen hinsichtlich der relativen Vorteilhaftigkeit von Zahlungsströmen zu vermeiden, müssen die Opportunitäten in Form der am Bewertungsstichtag gültigen Geld- und Kapitalmarktsätze („spot rates“) exakt erfaßt werden. Formal ausgedrückt gilt nun:

$$(2)\quad BW_t = \frac{Z_1}{(1+r_1)^1} + \frac{Z_2}{(1+r_2)^2} + \frac{Z_3}{(1+r_3)^3} + \ldots + \frac{Z_T}{(1+r_T)^T}$$

wobei:

r_t	= periodengerechte Marktzinssätze in Abhängigkeit von der (Rest-)Laufzeit

BEWERTUNG DURCH EINE "SPOT PAR YIELD CURVE"

Bei den Diskontsätzen in Gleichung (2) handelt es sich um Marktrenditen aus bestimmten Marktsegmenten, bspw. um die Renditen von Bundespapieren zu pari. Die Menge solcher Renditen, geordnet nach ihren Restlaufzeiten, wird als "spot par yield curve" bzw. Kuponstrukturkurve bezeichnet.

Eine Bewertung von Finanztiteln direkt über die spot par yield curve bildet allerdings auch nicht hinreichend genau die Realität ab, weil sie lediglich zu einer durchschnittlichen (geometrischen) Diskontierung der einzelnen Zahlungen (mit dem zum Zeitpunkt t gültigen Zinssatz) führt. Die **implizite Verzinsungsstruktur** am Beispiel der Zahlung zum Zeitpunkt t=3 sieht nämlich wie folgt aus:

$$\text{(2a)}\quad BW_3 = \frac{Z_3}{(1+r_3)^3} = \frac{Z_3}{(1+r_3)^1} * \frac{1}{(1+r_3)^1} * \frac{1}{(1+r_3)^1}$$

Finanzmathematische Berechnungen auf Basis der spot par yield curve sind folglich aufgrund des Durchschnittsprinzips (so wird Z_3 über alle 3 Perioden einheitlich mit r_3 bewertet) nicht in der Lage, die konkreten Wiederanlagebedingungen am Markt zu berücksichtigen. Um zu einem exakten Ergebnis zu gelangen, ist die spot par yield curve vielmehr so zu transformieren, daß die zur Zeit der Bewertung sicheren Wiederanlagebedingungen implizit in den Renditensätzen eingerechnet werden, so wie dies von Zero Bonds bekannt ist: für die Berechnungen muß ein Zahlungsstrom zugrundegelegt werden, der zwischenzeitliche Zahlungen (die ja für die Wiederanlageproblematik verantwortlich sind) in die Rückzahlung zum Zeitpunkt T einrechnet. Die so ermittelte „spot zero yield curve“ spiegelt exakt - wenn auch modellhaft - die Wiederanlagebedingungen am Geld- und Kapitalmarkt wider. Mit einer Struktur aus "wiederanlagefreien" Renditensätzen wird es möglich, jeder Zahlung einen periodenindividuellen Zinssatz zuzuordnen, um so zu einer korrekten Marktbewertung zu gelangen. Relativ einfach wäre es nun, Renditen von am Markt gehandelten Zero Bonds, in Abhängigkeit von ihrer Restlaufzeit, in eine solche Null-Kuponstrukturkurve einzustellen. Hierfür fehlen allerdings am Markt die Zero Bonds für die Spannbreite der benötigten Laufzeiten. Aus diesem Grund müssen die Zero-Bond-Renditen synthetisch aus einer Folge von Zero Bonds gewonnen werden.

Die implizite Verzinsungsstruktur, wiederum am Beispiel der Zahlung zum Zeitpunkt t=3, sieht dann im Ergebnis wie folgt aus:

(2b) $BW_3 = \frac{Z_3}{(1+FR_{21})} * \frac{1}{(1+FR_{11})} * \frac{1}{(1+r_1)}$

wobei:

FR_{nm} = Forward Rates zum Zeitpunkt n für m Perioden

Die Ableitung der Forward Rates, die keine unsicheren Prognosewerte, sondern sichere Arbitragewerte darstellen, erfolgt in drei Schritten und soll im Folgenden dargestellt werden:

1. Ermittlung der spot par yield curve (Kuponzinssätze zu pari)
2. Ableitung der spot zero yield curve (Zero-Renditen) aus der Renditestrukturkurve
3. Ableitung der Forward Rates aus den Zero-Renditen.

ABLEITUNG DER ZERO-RENDITEN SOWIE DER FORWARD RATES

Die spot zero yield curve muß aus den Marktzinssätzen, d.h. aus der spot par yield curve, generiert werden. Wie aus Gleichung (2) deutlich wird, kann jede Zahlung eines Finanztitels für sich als ein eigener Zero Bond aufgefaßt werden. Um die laufzeitadäquate ("wiederanlagefreie") Zero-Rendite (rz_1) zu finden, wird zunächst der Renditesatz für die 1. Periode aus der spot par yield curve abgeleitet. Da in der 1. Periode keine zwischenzeitlichen Kuponzahlungen anfallen, entspricht die Marktrendite der Zero-Rendite. Ist der Renditesatz für die 1. Periode (rz_1) bekannt, können die folgenden Sätze rekursiv (es handelt sich folglich um ein lineares Gleichungssystem, das über die Matrizenrechnung gelöst werden kann) abgeleitet werden:

(3) 1. Periode: $1 = \frac{r_1}{1+rz_1} + \frac{1}{1+rz_1} = \frac{1+r_1}{1+rz_1} = rz_1 = r_1$

2. Periode: $1 = \frac{r_2}{1+rz_1} + \frac{r_2}{(1+rz_2)^2} + \frac{1}{(1+rz_2)^2} = \frac{r_2}{1+rz_1} + \frac{1+r_2}{(1+rz_2)^2}$

$$rz_2 = \sqrt{\frac{1+r_2}{1-\frac{r_2}{1+rz_1}}} - 1$$

allg.: $1 = r_T * \sum_{t=1}^{T-1} \frac{1}{(1+rz_t)^t} + \frac{1+r_T}{(1+rz_T)^T}$

hieraus folgt: $rz_T = \sqrt[T]{\frac{1+r_T}{1-r_T * \sum_{t=1}^{T-1} \frac{1}{(1+rz_t)^t}}} - 1$

wobei:

rz_t = wiederanlagefreie Marktzinssätze

Das hier beschriebene Verfahren des "boot-strappings" startet mit der kürzesten Laufzeit und tastet sich bis zur längsten Laufzeit vor; während das Verfahren der sog. "struktur-kongruenten" Bewertung den umgekehrten Weg nimmt (vgl. Siegert 1994, S. 426). Die Ergebnisse sind identisch.

Aufgrund der ermittelten Zero-Bond-Renditen (rz), die immer für einen Zeitraum von t_0 bis t_T relevant sind, können deterministische Zinssätze (deterministisch, weil diese Effektivrenditen implizit in der vorliegenden Renditekurve enthalten sind) für zukünftige Perioden (Terminzinssätze), die bereits in Gleichung (2b) erwähnten Forward Rates, ermittelt werden. Diese (Grenz-) Zinsätze sind in der Zukunft beginnende periodenindividuelle Renditen für t_n bis t_m bzw. $t_{T\text{-}t}$, deren Ableitung sich auf die Arbitrage-Vorstellung gründet, daß bspw. ein Kassa-Zahlungsstrom über 2 Jahre die gleiche Rendite erwirtschaften muß wie eine Kombination von einem ein-jährigen Kassa-Zahlungsstrom und einem ein-jährigen Termin-Zahlungsstrom mit Start in einem Jahr. Diese Duplizierung von Zahlungsströmen, bei denen die Forward Rate für die Arbitragefreiheit gegenüber Kassa-Geschäften sorgt, findet auf Basis sicherer Informationen zum Zeitpunkt t(0) statt - ist somit völlig risikofrei:

(4) $$(1+rz_2)^2 = (1+rz_1)*(1+FR_{11})$$

allg.:

$$(1+rz_T)^T = (1+rz_t)^t*(1+FR_{T-t})^{T-t}$$

$$FR_{T-t} = \sqrt[T-t]{\frac{(1+rz_T)^T}{(1+rz_t)^t}}-1$$

wobei:

t	= n	(... in der n-ten Periode ...
T-t	= m	...für m Perioden)

Die Forward Rate repräsentiert die (Grenz-)Rendite nicht nur für einjährige Perioden, sondern auch für Bruchteile. Auf Zinsberechnungsbasis 30/360 und exponentieller Zinsverrechnung gilt:

(5) $$(1+rz_t)^{(t/12)} * (1+FR_{nm})^{((T-t)/12)} = (1+rz_T)^{(T/12)}$$

wobei:

t,T = in Monaten

Aufgrund der Forward Rates können nun die Barwerte von Zahlungsströmen unterschiedlichster Laufzeit (hierfür ist es in der Praxis allerdings notwendig, die Forward Rates durch vorausgehende Interpolation der Zero-Renditen zu berechnen, um eine zeitlich lückenlose Grundlage für die Bewertung der Cash Flows zu erhalten) exakt, im Sinne der Gleichung (2b), bestimmt werden.

BEISPIEL: VON DEN MARKTDATEN ZUR BEWERTUNG EINES ZINSSWAPS

Die Marktzinssätze einer spot par yield curve spiegeln die Kuponzahlungen von Anleihen mit unterschiedlichen Laufzeiten wider, die zu pari gehandelt werden. Es soll nun gezeigt werden, wie sich daraus die Zero-Renditen - unter der Prämisse halbjährlicher Kuponzahlungen - ermitteln lassen.

(a) Ausgangssituation - der Geld- und Kapitalmarkt mit seiner gegebenen Zinsstruktur:

Zeit in Jahren	spot par yield curve
0,5	4,0666
1	4,5066
1,5	5,0694
2	5,3801

(b) Berechnungsgrundlage - ein lineares Gleichungssystem (p.a.-Zinssätze, exponentiell auf Basis 30/360):

$$1 = \frac{1 + 0{,}040666 * 0{,}5}{(1 + rz_{0,5})^{0,5}} = 0{,}041079$$

$$1 = \frac{0{,}045066 * 0{,}5}{(1 + 0{,}041079)^{0,5}} + \frac{1 + 0{,}045066 * 0{,}5}{(1 + rz_1)^1} = 0{,}045625$$

$$1 = \frac{0{,}050694 * 0{,}5}{(1 + 0{,}041079)^{0,5}} + \frac{0{,}050694 * 0{,}5}{(1 + 0{,}045625)^1} + \frac{1 + 0{,}050694 * 0{,}5}{(1 + rz_{1,5})^{1,5}} = 0{,}051523$$

$$1 = \frac{0{,}053801 * 0{,}5}{(1 + 0{,}041079)^{0,5}} + \frac{0{,}053801 * 0{,}5}{(1 + 0{,}045625)^1} + \frac{0{,}053801 * 0{,}5}{(1 + 0{,}051523)^{1,5}} + \frac{1 + 0{,}053801 * 0{,}5}{(1 + rz_2)^2} = 0{,}054806$$

(c) Ergebnis:

Zeit in Jahren	spot par yield curve	spot zero yield curve	ZBAF
0,5	4,0666	4,1079	$1/(1{,}041079)^{0,5}=0{,}9801$
1	4,5066	4,5625	$1/(1{,}045625)^{1,0}=0{,}9564$
1,5	5,0694	5,1523	$1/(1{,}051523)^{1,5}=0{,}9274$
2	5,3801	5,4806	$1/(1{,}054806)^{2,0}=0{,}8988$

Die Zerobondabzinsungsfaktoren (ZBAF) könnten auch direkt aus dem Gleichungssystem gewonnen werden ($1=ZBAF_{0,5}*(1{,}040666*0{,}5)=0{,}9801$). ZBAF stellen insofern eine rechentechnische Vereinfachung dar, um Zahlungsströme exakt zu diskontieren ($((1+FR_{01})*1+FR_{11}))^{-1}=ZBAF_{02}$). Für die Bewertung eines SWAPs und anderer Finanztitel wie Futures und FRA's (vgl. Diwald 1994, S. 227f) werden explizit die Forward

Rates benötigt. Sie lassen sich wie in Gleichung (5) beschrieben bestimmen. Für eine Forward Rate, die in 6 Monaten beginnt und eine Laufzeit von 6 Monate hat, gilt bspw. (exponentiell, Basis 30/360):

$$(1+0{,}041079)^{(6/12)} * (1+FR_{6/6})^{((12-6)/12)} = (1+0{,}045625)^{(12/12)}$$

$$FR_{6/6} = \sqrt[0{,}5]{\frac{1{,}045625^{1}}{1{,}041079^{0{,}5}}} - 1 = 0{,}050191$$

Auf Grund dieser Beziehung lassen sich für einen Zeitraum m von 6 Monaten, folgende Forward Rates bestimmen:

heute	für 6 Monate ($rz_{0/6}$)	= 4,1079
in 6 Monaten	für 6 Monate ($FR_{6/6}$)	= 5,0191
in 12 Monaten	für 6 Monate ($FR_{12/6}$)	= 6,3419
in 18 Monaten	für 6 Monate ($FR_{18/6}$)	= 6,4717.

(d) Bewertungskonzeption für SWAPS

In die Bewertung von SWAPs werden sowohl die Festzinszahlungen als auch die variablen Zahlungen einbezogen. Die variablen Zahlungen am Swapmarkt sind immer an die Interbankraten FIBOR bzw. LIBOR gekoppelt. Alle nicht gefixten (also zukünftigen) LIBOR- bzw. FIBOR-Zahlungen werden durch die Multiplikation der ermittelten Forward Rates mit dem Nominalbetrag des Zinsswaps ermittelt. Damit wird offensichtlich, daß für die Preisbildung nicht primär der aktuelle (gefixte) LIBOR- bzw. FIBOR-Satz relevant ist, sondern vor allem die zukünftigen Termin-Zinssätze. Anzumerken ist, daß eine Verringerung der Zinsbelastung (Festzins > variabler Zins), wie eingangs unterstellt, nur in der 1. Periode von 6 Monaten sicher ist. Für alle weiteren Perioden besteht trotz der arbitragefreien Forward Rates natürlich Unsicherheit - maßgeblich ist dann nämlich der jeweilig geltende tatsächliche LIBOR/FIBOR-Satz. Vor dem Eintreten in einen SWAP (sowie FRA'S, Optionen und Zinsbegrenzungsvereinbarungen) ist es aber unerläßlich, auf die Zinssätze zurückzugreifen, die in der Zukunft vom Markt erwartet werden, weil die Forward-Zinssätze (die ja implizit in der heutigen Zinsstrukturkurve enthalten sind) die Bewertungsgrundlage für die derzeitigen Marktkonditionen darstellen.

Die **Bewertungsbeziehung** für Zinsswaps aus der Sicht eines Festzinszahlers lautet:

$$\text{(6)} \qquad \text{Swap} - \text{Wert}_{tn} = \sum_{i=tv}^{tm} rz_i * \frac{\text{Tage}_i}{360} * N * ZBAF_i - \sum_{j=tf}^{tm} c * \frac{\text{Tage}_j}{360} * N * ZBAF_j$$

wobei:

tn	= Bewertungsstichtag
tv/tf	= Zinszahlungstermin der variablen bzw. fixen Seite
tm	= Laufzeitende
rz_i	= variabler Zinssatz für die Zinsperiode; entweder bereits gefixt oder durch die entsprechenden Forward-Rates approximiert
$Tage_{i,j}$	= Anzahl der Zinstage für die Zinsperiode
N	= Nominalbetrag des SWAPs
$ZBAF_{i,j}$	= Diskontierungsfaktor
C	= Festzinssatz/100.

Beispiel: Die Vertragsdaten eines Zinsswaps lauten wie folgt:

- Nominalbetrag: 1 Mio. DM
- Vertragsabschluß: 26.6.1994
- Laufzeitbeginn: 1.7.1994
- Laufzeitende: 1.7.1996

- Festzins: 6,5 %
- Zinsberechnungsmethode: 30/360
- Zinszahlungen: jährlich, nachträglich

- variabler Zins: 6M-Libor
- Zinsberechnungsmethode: 30/360 (in der Praxis i.d.R. act/360, wg. Geldmarkt-Satz)
- Zinszahlungen: halbjährlich, nachträglich

Diese Konditionen, aufgelöst in einen festen und einen variablen Zahlungsstrom, führen zu folgendem **Ergebnis**:

Zeit	**par rate**	**zero rate**	**ZBAF**	**FR (6M)**	**var. Zahlung (in DM)**	**Barwert var. Zahlung**	**fixe Zahlung (in DM)**	**Barwert fixe Zahlung**
0,5	4,0666	4,1079	0,9801	4,1079	20539,5	20130,19		
1	4,5066	4,5625	0,9564	5,0191	25095,5	24000,49	65000	62166
1,5	5,0694	5,1523	0,9274	6,3419	31709,5	29407,74		
2	5,3801	5,4806	0,8988	6,4717	32358,5	29083,27	65000	58422
Σ						**102621,66**		**120588**

Zur Bewertung von bestehenden SWAP-Positionen wird aus Sicht des Festzinszahlers der Barwert der variablen Zahlungen dem Barwert der Festzinszahlungen gegenübergestellt; die Differenz stellt den "mark-to-market"-Wert dieser Position dar. In dem Beispiel resultiert ein Bewertungsergebnis per 1. Juli 1994 von 102621,66 DM - 120588 DM = -17966,34 DM. In dieser Höhe müßte bei Jahresabschluß eine Rückstellung gebildet werden. Bei einer sog. "close-out"-Vereinbarung findet ein entsprechender Barausgleich statt, der anschließend zu einer Aufhebung der SWAP-Vereinbarung führt (vgl. Heidorn/Bruttel: 1993, S. 108).

LITERATUREMPFEHLUNG:

H.Diwald: Zinsfutures und Zinsoptionen, München 1994, S. 221-232
T.Heidorn: Vom Zins zur Option, Wiesbaden 1994, S. 31-37
T.Heidorn/H.Bruttel: Treasury Management, Wiesbaden 1993, S. 81-89
L.Kruschwitz/M.Röhrs: Debreu, Arrow und die marktzinsorientierte Investitionsrechnung. In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft 5/1994, S. 655-665
A.W.Marusev/A.Pfingsten: Arbitragefreie Herleitung zukünftiger Zinsstrukturkurven und Kurswerte. In: Die Bank 3/1992, S. 169-172
H.Siegert: Vom Umgang mit Zahlungsströmen. In: Die Bank 7/1994, S. 422-426
M.Steiner/C.Bruns: Wertpapier-Management, 1. Aufl. Stuttgart 1993, S. 224-230